

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

A) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$.

Γ) Δίνονται τα σημεία A_1, A_2, \dots, A_8 της (ϵ) που έχουν τετμημένες x_1, x_2, \dots, x_8 με

μέση τιμή $\bar{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \cdot f'(x)}{x^3 - 1}$ και τυπική απόκλιση $s = f''(1)$.

i) Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τετμημένων των σημείων A_1, A_2, \dots, A_8 .

ii) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων A_1, A_2, \dots, A_8 .

iii) Έστω ότι $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_8 < 1$. Αν ισχύουν $x_8 \cdot x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_8 - x_1 = 4$ να υπολογίσετε το εύρος των $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_8)$.

ΛΥΣΗ

A) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R}^* και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

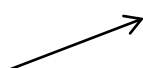
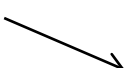
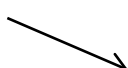
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	○	-	-	○	+
x^2	+		+		+	+
f'	+		-		-	+
f						

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν τα εξής :

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$
- στο $x_1 = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 2$
- στο $x_2 = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -2$

Β) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ θα έχει εξίσωση $y = \lambda \cdot x + \beta$, όπου $\lambda = f'(2)$.

$$\text{Είναι } \lambda = f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ και}$$

$$f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \text{ άρα } M\left(2, \frac{5}{2}\right).$$

$$M \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = \frac{3}{4}x + 1$.

Γ) i) Έχουμε :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \cdot f'(x)}{x^3 - 1} = 6 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \\ &= 6 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1)} = 6 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2 \cdot (x - 1)(x^2 + x + 1)} = \\ &= 6 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4\end{aligned}$$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R}^* και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)' = \frac{(x^2 - 1)'x^2 - (x^2 - 1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \\ &= \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } s = f''(1) = 2$$

ii) Αφού τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_8(x_8, y_8)$ είναι σημεία της

$(\varepsilon): y = \frac{3}{4}x + 1$, τότε θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, άρα θα είναι της μορφής

$$y_i = \frac{3}{4}x_i + 1 \text{ με } i = 1, 2, \dots, 8.$$

Επομένως έχουμε η μέση τιμή θα είναι: $\bar{y} = \frac{3}{4}\bar{x} + 1 = \frac{3}{4} \cdot 4 + 1 = 4$

$$\text{και η τυπική απόκλιση: } s_y = \left| \frac{3}{4} \right| s_x = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων θα είναι:

$$CV_y \% = \frac{s_y}{\bar{y}} \cdot 100 = \frac{\frac{3}{2}}{4} \cdot 100 = 37,5\%$$

iii) Στο διάστημα $(0,1]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως προκύπτει:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_8 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) > \dots > f(x_8).$$

Επομένως το εύρος R θα είναι :

$$\begin{aligned} R &= f(x_1) - f(x_8) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_8 - \frac{1}{x_8} = \\ &= (x_1 - x_8) + \frac{x_8 - x_1}{x_1 \cdot x_8} = -4 + \frac{4}{1} = -4 + 8 = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.

Έστω ότι $f'(0), 7, f'(1)+2, f(-1), -2$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος .

A) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ,τη διάμεσο και τη διακύμανση.

B) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M\left(\frac{R}{13}, f\left(\frac{R}{13}\right)\right)$

Γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) - 3}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$.

Ε) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση

A) Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

Για τις παρατηρήσεις του δείγματος έχουμε:

$$\bullet f'(0) = -9$$

$$\bullet f'(1) + 2 = -3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 9 + 2 = 2$$

$$\bullet f(-1) = -(-1)^3 + 6(-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 1 = 17$$

Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: $-9, -2, 2, 7, 17$

$$\bullet \text{ Η μέση τιμή είναι: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{v} = \frac{-9 - 2 + 2 + 7 + 17}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

• Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 5, περιττός αριθμός, τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση, άρα $\delta = 2$.

$$\begin{aligned} \bullet s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{(-9-3)^2 + (-2-3)^2 + (2-3)^2 + (7-3)^2 + (17-3)^2}{5} = \\ &= \frac{144 + 25 + 1 + 16 + 196}{5} = 76,4 \end{aligned}$$

B) Το εύρος των παρατηρήσεων είναι: $R = 17 - (-9) = 26$.

Επομένως $M\left(\frac{R}{13}, f\left(\frac{R}{13}\right)\right)$ ή $M(2, f(2))$ ή $M(2, -1)$

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της C_f .

Έχουμε $\lambda = f'(2) = 3$. Άρα $(\varepsilon): y = 3x + \beta$.

$M(2, -1) \in (\varepsilon)$ άρα έχουμε $-1 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = -7$.

Τελικά $(\varepsilon): y = 3x - 7$.

Γ) Έχουμε $A = \mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0.$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$$

$$x_1, x_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν το πινακάκι:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\searrow	

Η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στη θέση $x = 3$ το $f(3) = 1$
- τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 1$ το $f(1) = -3$

Δ) Η f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = -6x + 12$.

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) - 3}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 12x - 9 + 6x - 12 - 3}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 18x - 24}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)(x-4)}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)(x-4)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)(x-4)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{x^2 + 5 - 3^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)(x-4)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x-2)(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-4)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{x+2} = 9 \end{aligned}$$



Ε) Ο συντελεστής διεύθυνσης της καμπύλης της συνάρτησης f σε ένα σημείο της $(x, f(x))$ είναι $\lambda = f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

Ζητάμε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9, x \in \mathbb{R} \text{ έχει μέγιστο.}$$

Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = -6x + 12$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+		-
$f'(x)$			

Επομένως το σημείο θα είναι το $(2, f(2))$ ή $(2, -1)$