

ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Στις ερωτήσεις **A1-A4** να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

A1. Μηχανικό σύστημα έχει ιδιοσυχνότητα ίση με 15Hz και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Το σύστημα απορροφά ενέργεια κατά το βέλτιστο τρόπο, όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι:

- α. 1Hz
- β. 15Hz
- γ. 10Hz
- δ. 100Hz

A2. Κατά τη φθίνουσα μηχανική ταλάντωση:

- α. το πλάτος παραμένει σταθερό.
- β. η μηχανική ενέργεια διατηρείται.
- γ. το πλάτος μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $A=A_0e^{-\Lambda t}$, όπου Λ θετική σταθερά.
- δ. έχουμε μεταφορά ενέργειας από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον.

A3. Ένα σώμα εκτελεί ΑΑΤ χωρίς αρχική φάση και σε χρόνο $3s$ φτάνει τρεις φορές στην ακραία θετική του θέση. Πόσες φορές στο παραπάνω χρονικό διάστημα η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης έγινε μέγιστη:

- α. δύο
- β. τρεις
- γ. τέσσερις
- δ. πέντε

A4. Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση και συχνότητα, και πλάτη A_1 και A_2 . Αν οι ταλαντώσεις αυτές παρουσιάζουν διαφορά φάσης 180° , τότε το πλάτος A της σύνθετης ταλάντωσης που προκύπτει από τη σύνθεσή τους είναι:

- α. $A = A_1 + A_2$
- β. $A = |A_1 - A_2|$
- γ. $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$
- δ. $A = \sqrt{A_1^2 - A_2^2}$

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με το γράμμα Σ , αν είναι σωστές, και με το γράμμα Λ , αν είναι λανθασμένες.

- α) Κατά τη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων, της ίδιας διεύθυνσης γύρω από

την ίδια θέση ισορροπίας με παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2 ($f_1 < f_2$) και με ίσα πλάτη, προκύπτει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος $0,2m$. Αν μειώσουμε λίγο την συχνότητα f_2 στην τιμή $f_3 > f_1$, τότε το μέγιστο πλάτος θα παραμείνει ίσο με $0,2m$, ενώ ο χρόνος μεταξύ δύο μεγίστων του πλάτους θα αυξηθεί.

- β) Σε ένα ταλαντούμενο σώμα εκτός της δύναμης επαναφοράς $-Dx$ ασκείται και δύναμη της μορφής $-bu$. Τότε η περίοδος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.
- γ) Η ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων δεν διατηρείται κατά τη διάρκεια μιας ανελαστικής κρούσης.
- δ) Υλικό σημείο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και την $t=0$ έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια και αρνητική επιτάχυνση έχει αρχική φάση π .
- ε) Σε μια φθίνουσα ταλάντωση, γύρω από το O , όταν το σώμα απομακρύνεται από το O κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, η επιτάχυνσή του έχει μέτρο Dx/m .

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Συνθέτουμε δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και έχουν εξισώσεις:

$$x_1 = 8\eta\mu(2\pi t + \pi/6) \text{ και } x_2 = 8\eta\mu(2\pi t + \pi/2), \text{ το } x \text{ σε cm το } t \text{ σε s.}$$

Η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

α. $x = 8\sqrt{3}\eta\mu(2\pi t + \pi/6)$ το x σε cm το t σε s

β. $x = 8\sqrt{3}\eta\mu(2\pi t + \pi/3)$ το x σε cm το t σε s

γ. $x = 8\sqrt{3}\eta\mu(2\pi t - \pi/3)$ το x σε cm το t σε s

Δίνονται: $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- B2.** Το σώμα Σ μάζας $m=8\text{kg}$ του σχήματος εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση μέσα σε δοχείο που περιέχει αέρα υπό πίεση, από τον οποίο δέχεται δύναμη της μορφής $F' = -bu$ με $b = \text{σταθ}$. Το ελατήριο έχει σταθερά $k=200\text{N/m}$.

A) Αν το σώμα σε χρόνο $t=5\pi$ s διέρχεται 40 φορές από τη θέση ισορροπίας του, τότε η κυκλική συχνότητα του διεγέρτη τροχού είναι:

α. 8rad/s

β. 15rad/s

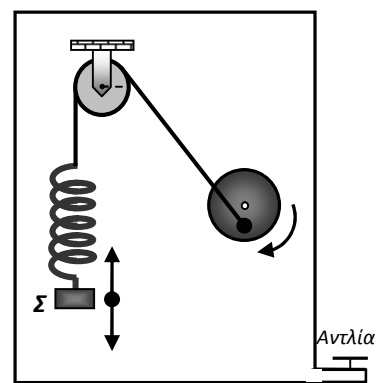
γ. 19rad/s

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

B) Για να συντονιστεί το σύστημα πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη να:

α. αυξηθεί κατά 37,5%

β. μειωθεί κατά 37,5%



γ. μείνει σταθερή

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- B3.** Σημειακό αντικείμενο εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με ίσα πλάτη και παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2 ($f_1 > f_2$) που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, εκτελώντας έτσι διακροτήματα. Αν η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του ισούται με Δt_1 , ενώ η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους ισούται με $\Delta t_2 = 30\Delta t_1$ τότε μεταξύ των συχνοτήτων των συνιστωσών ταλαντώσεων ισχύει:

α. $50f_1 = 23f_2$ β. $61f_1 = 59f_2$ γ. $29f_1 = 31f_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

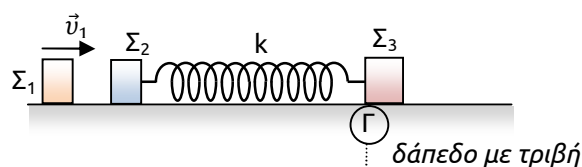
- B4.** Δύο σώματα Α και Β που έχουν μάζες $2m$ και m αντίστοιχα κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου u με τέτοιο τρόπο ώστε οι ταχύτητές τους να σχηματίζουν γωνία $\phi = \frac{2\pi}{3}$ rad μεταξύ τους. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά. Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των μαζών που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση είναι ίσο με:

α. $\frac{2}{3}$ β. $\frac{1}{2}$ γ. $\frac{1}{3}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ Γ

Σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\text{kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 300\text{N/m}$, στο άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 12\text{kg}$. Το σώμα Σ_3 βρίσκεται σε τραχύ δάπεδο το οποίο εκτείνεται δεξιότερα του σημείου Γ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το τμήμα του δαπέδου αριστερά του σημείου Γ είναι λείο. Αρχικά το σύστημα ηρεμεί με το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος. Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ κινείται στο λείο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου $u_1 = 4\text{ m/s}$ στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου προς το σώμα Σ_2 , με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$, κατά τη διάρκεια της οποίας το σώμα Σ_3 παραμένει μόνιμα ακίνητο.



- Γ1.** Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.
- Γ2.** Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 πριν την κρούση που μετατράπηκε σε ενέργεια ταλάντωσης του Σ_2 .
- Γ3.** Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή που η ταχύτητα του Σ_2 μηδενίζεται για πρώτη φορά.

- Γ4.** Να βρείτε τη χρονική εξίσωση της στατικής τριβής μεταξύ του σώματος Σ_3 και του οριζόντιου επιπέδου και να την παραστήσετε γραφικά.
- Γ5.** Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του σώματος Σ_3 και του οριζόντιου επιπέδου ώστε το σώμα Σ_3 να παραμένει μόνιμα ακίνητο.

Θεωρήστε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Επίσης, θεωρήστε αμελητέα τη χρονική διάρκεια της κρούσης. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και για τις πράξεις $\pi=3,14$.

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. β, A2. δ, A3. δ, A4. β, A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1) Σωστή απάντηση είναι η (β)

Η διαφορά φάσης των αρχικών ταλαντώσεων είναι:

$$\Delta\phi = (2\pi t + \pi/2) - (2\pi t + \pi/6) = \pi/3$$

Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi} = \sqrt{64 + 64 + 2 \cdot 8 \cdot 8\cos\pi/3} = 8\sqrt{3}\text{cm}$$

Για τη διαφορά φάσης θ της συνισταμένης ταλάντωσης με την ταλάντωση x_1 έχουμε:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\Delta\phi}{A_1 + A_2\cos\Delta\phi} = \frac{8\eta\mu\pi/3}{8 + 8\cos\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \pi/6\text{rad}$$

Τελικά, η εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_{01} + \theta) = 8\sqrt{3}\eta\mu(2\pi t + \pi/6 + \pi/6) = 8\sqrt{3}\eta\mu(2\pi t + \pi/3) \quad (\text{το } x \text{ σε cm το } t \text{ σε s})$$

B2)

A) Σωστή απάντηση είναι η (α)

Σε χρόνο $t = 5\pi\text{s}$ γίνονται $N = 20$ ταλαντώσεις, οπότε η περίοδος του διεγέρτη είναι:

$$T_{\text{διεγερτη}} = \frac{t}{N} = \frac{\pi}{4}\text{s} \text{ και η συχνότητά του είναι: } f_{\text{διεγερτη}} = \frac{1}{T_{\text{διεγερτη}}} = \frac{4}{\pi}\text{Hz}$$

$$\text{Άρα είναι: } \omega_{\text{διεγερτη}} = 2\pi f_{\text{διεγερτη}} = 8\text{rad/s}$$

B) Σωστή απάντηση είναι η (β)

$$\text{Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι: } f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{8}} = \frac{5}{2\pi}\text{Hz}$$

Για να βρίσκεται το σύστημα σε συντονισμό πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη να ισούται με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Gamma\% = \frac{f_0 - f_{\text{διεγερτη}}}{f_{\text{διεγερτη}}} 100\% = \frac{\frac{5}{2\pi} - \frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} 100\% = \frac{-\frac{3}{2\pi}}{\frac{4}{\pi}} 100\% = -37.5\%$$

B3) Σωστή απάντηση η (γ)

Η χρονική διάρκεια Δt_1 αντιστοιχεί σε μισή ταλάντωση, οπότε:

$$\Delta t_1 = \frac{\bar{T}}{2} = \frac{\bar{f}}{2} = \frac{1}{f_1 + f_2}$$

Η χρονική διάρκεια Δt_2 αντιστοιχεί στην περίοδο του διακροτήματος, οπότε:

$$\Delta t_2 = T_{\Delta} = \frac{1}{f_{\Delta}} = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

$$\text{Ισχύει: } \Delta t_2 = 30\Delta t_1 \Rightarrow \frac{1}{f_1 - f_2} = 30 \frac{1}{f_1 + f_2} \Rightarrow 29f_1 = 31f_2$$

B4) Σωστή απάντηση είναι η (α)

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την κρούση:

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{συσ}}, \text{ όπου } \vec{p}_{\text{συσ}} \text{ η ορμή του συσσωματώματος.}$$

Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος λοιπόν, θα είναι:

$$p_{\text{συσ}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\varphi} \Rightarrow$$

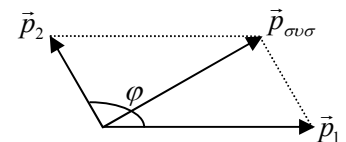
$$\Rightarrow (m + 2m)V = \sqrt{(2mu)^2 + (mu)^2 + 2(2mu)(mu)\cos 120^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3mV = mu\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{u\sqrt{3}}{3}$$

όπου V μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Το ζητούμενο κλάσμα είναι:

$$\frac{Q}{K_{\text{αρχ}}} = \frac{K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} = 1 - \frac{K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}3mV^2}{\frac{1}{2}2mu^2 + \frac{1}{2}mu^2} = 1 - \frac{3\left(\frac{u\sqrt{3}}{3}\right)^2}{3u^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική με το Σ_2 αρχικά ακίνητο, οπότε οι ταχύτητες u_1' και u_2' των Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση θα είναι:

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{1 - 3}{1 + 3} 4 \frac{m}{s} \Rightarrow u_1' = -2 \frac{m}{s}$$

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{2}{1 + 3} 4 \frac{m}{s} \Rightarrow u_2' = 2 \frac{m}{s}$$

Γ2) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του Σ_2 είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10 \text{ rad/s}$

Το σώμα Σ_2 ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας του, οπότε:

$$u_2' = u_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{u_2'}{\omega} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

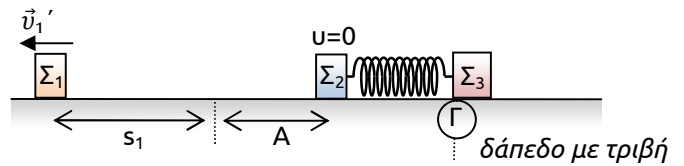
Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\pi\% = \frac{E}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2} 100\% = \frac{300 \cdot 0,2^2}{1 \cdot 4^2} 100\% = 75\%$$

Γ3) Η ταχύτητα του Σ_2 μηδενίζεται για 1η φορά όταν φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσής του, συνεπώς μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = T/4$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης.

Αλλά $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2\pi \text{ s}$, οπότε $\Delta t = 0,05\pi \text{ s}$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το Σ_1 έχει διανύσει διάστημα $s_1 = |u_1'| \Delta t = 2 \cdot 0,05\pi = 0,1\pi \text{ m}$ ή αλλιώς $s_1 = 0,314 \text{ m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Συνεπώς η απόσταση d μεταξύ Σ_1 και Σ_2 εκείνη τη στιγμή είναι: $d = s_1 + A = d = 0,514 \text{ m}$.



Γ4) Για την ταλάντωση του Σ_2 ισχύει: $\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\text{ελ}} = -kx$

Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $x = A \eta \mu \omega t$ οπότε $x = 0,2 \eta \mu 10t$ (S.I.)

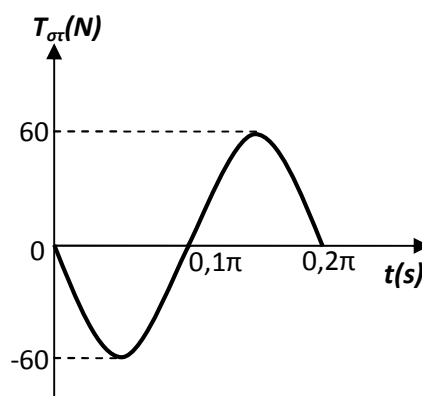
Άρα έχουμε: $F_{\text{ελ}} = -300 \cdot 0,2 \eta \mu 10t \Rightarrow F_{\text{ελ}} = -60 \eta \mu 10t$ (S.I.).

Το σώμα Σ_3 ισορροπεί, δεχόμενο στον οριζόντιο άξονα x τη δύναμη $\vec{F}_{\text{ελ}}'$ από το ελατήριο και την στατική τριβή $\vec{T}_{\text{στ}}$. Η $\vec{F}_{\text{ελ}}'$ είναι αντίθετη της $\vec{F}_{\text{ελ}}$, οπότε ισχύει: $F_{\text{ελ}}' = 60 \eta \mu 10t$ (S.I.).

Εφόσον λοιπόν το Σ_3 παραμένει συνεχώς ακίνητο, ισχύει $\Sigma F_x = 0$ οπότε η στατική τριβή $\vec{T}_{\text{στ}}$ είναι συνεχώς αντίθετη της $\vec{F}_{\text{ελ}}'$. Άρα $T_{\text{στ}} = -60 \eta \mu 10t$ (S.I.)

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:

αυτής της εξίσωσης



Γ5) Η μέγιστη τιμή του μέτρου της στατικής τριβής είναι $T_{\text{στ,max}}=60\text{N}$, όπως φαίνεται από τη χρονική της εξίσωση στο ερώτημα Γ4. Για να υπάρχει μια τέτοια τιμή της στατικής τριβής θα πρέπει να υπάρχει κατάλληλος συντελεστής στατικής τριβής μ_s και να ισχύει:

$T_{\text{στ,max}} \leq \mu_s N$, όπου N η κάθετη αντίδραση που δέχεται το Σ_3 από το δάπεδο, για την οποία ισχύει:

$N = m_3 g = 120 \text{ N}$. Έτσι, η προηγούμενη σχέση δίνει:

$60 \leq 120 \mu_s \Rightarrow \mu_s \geq 0,5$. Άρα η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής θα πρέπει να είναι:

$$\mu_{s,\text{min}} = 0,5$$