ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο ¨ , να αποδείξετε ότι:

$$(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$

Μονάδες 10

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.

(Μον. 2)

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε x_0 Ξ Α ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(Μον. 2)

γ) Το εύρος (R) είναι ένα μέτρο διασποράς.

(Μον. 2)

Μονάδες 6

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $((x^{\rho})' = \ldots$, όπου ρ ρητός αριθμός.

(Μον.3)

β) (συνx)' = ...

(Μον. 3)

γ) Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \ldots$$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

4, κ, 5, 6, 2κ + 1, 4, 6, κ + 2, 6, 4

όπου:

$$\kappa = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι κ = 3.

Μονάδες 7

Β2. Για κ = 3, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\left(\bar{x}\right)$ των βαθμών του φοιτητή.

Μονάδες 5

Β3. Για κ = 3, να υπολογίσετε τη διακύμανση $\left(s^2\right)$.

Μονάδες 8

Β4. Για κ = 3, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV.

Δίνεται ότι $\sqrt{1,4} \cong 1,18$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$.

Μονάδες 5

Γ2. Η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$.

Μονάδες 10

Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Μονάδες 6

Δ4. Εάν τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y=f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των τετμημένων x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 των $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τεταγμένων y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 των σημείων $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Α2. **α)** Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

Α3. **α)** $\left(x^{\rho}\right)'=\rho\cdot x^{\rho-1}$

β) $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

γ) $\overline{x}=\dfrac{x_1\cdot w_1+x_2\cdot w_2+\ldots x_\nu\cdot w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i\cdot w_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι ,

$$\kappa = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$$

Β2. Για κ = 3 , έχουμε τις εξής παρατηρήσεις :

4,3,5,6,7,4,6,5,6,4

Οπότε για την μέση τιμή τους έχουμε :

$$\bar{x} = \frac{4+3+5+6+7+4+6+5+6+4}{10} = \frac{50}{10} \text{ Ÿ } \bar{x} = 5$$

Β3. Είναι ,

$$s^2 = \frac{(4-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2}{10}$$

$$s^2 = \frac{1+4+0+1+4+1+1+0+1+1}{10}$$

$$s^2 = \frac{14}{10} \text{ Ÿ } s^2 = 1{,}4$$

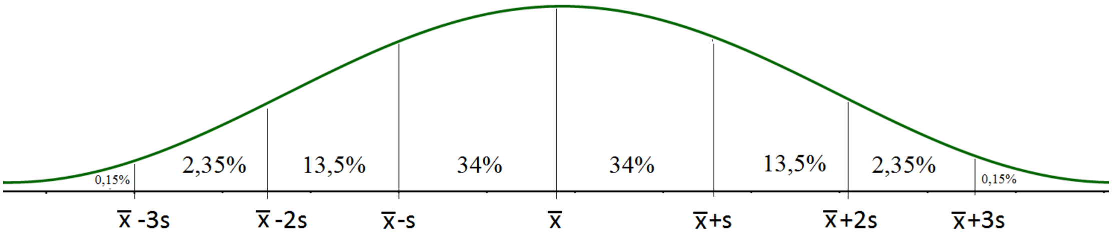
Β4. Έχουμε $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}4} \cong 1{,}18$, οπότε

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cong \frac{1{,}18}{5} \cong \frac{2{,}36}{10} \cong 0{,}236$$

Άρα ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος $CV \cong 23{,}6\ \%$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή έχουμε την παρακάτω καμπύλη:



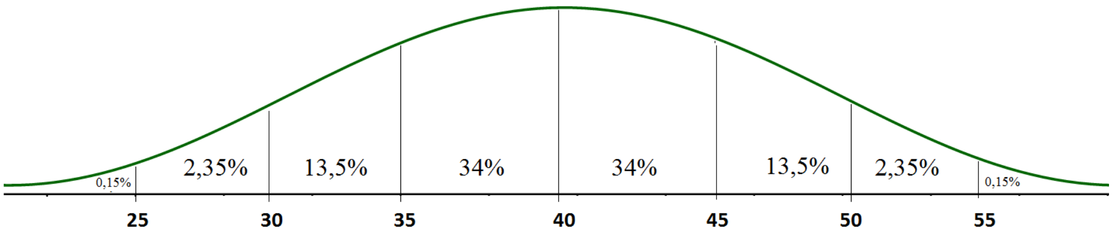
Γνωρίζουμε ότι το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών, επομένως με τη βοήθεια της καμπύλης $\bar{x} = 40$

Γ2. Γνωρίζουμε ότι το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35,
επομένως με τη βοήθεια της καμπύλης

$$\bar{x} - s = 35 \Rightarrow 40 - s = 35 \Rightarrow s = 5$$

Έχουμε λοιπόν ότι $s = 5$

Γ3. Η καμπύλη γίνεται λοιπόν:



Έχουμε λοιπόν ότι το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν ηλικία μεγαλύτερη
των 45 είναι 16%, με τη βοήθεια της καμπύλης.

Άρα το πλήθος τους θα είναι ίσο με:

$$\frac{16}{100}\cdot 400 = 64 \text{ εργαζόμενοι}$$

Γ4. Με τη βοήθεια του σχήματος, το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν ηλικία
μεταξύ 30 και 45 είναι 81,5%. Άρα το πλήθος τους θα είναι ίσο με:

$$\frac{81,5}{100}\cdot 400 = 326 \text{ εργαζόμενοι}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x)=-x^2+4x-3$.

Λύνουμε την $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα:

χ	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[3,+\infty)$.

Δ2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x=1$ με τιμή

$$f(1)=-\frac{1}{3}+2-3+1=-\frac{1}{3}.$$

Στο σημείο $x=3$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(3) = -\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1 = -9 + 18 - 9 + 1 = 1$$

Δ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο τυχαίο σημείο της $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$.

Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$, θα έχει τον ίδιο
συντελεστή διεύθυνσης με αυτή, άρα

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -x_0^{\,2} + 4x_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow x_0^{\,2} - 4x_0 + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

και $f(2) = -\frac{1}{3}\cdot 8 + 8 - 6 + 1 = \frac{1}{3}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

Δ4. Είναι: $f''(x) = -2x + 4$. Συνεπώς, έχουμε ότι: $y_i = -2x_i + 4$, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $s_x = 3$.

Η τυπική απόκλιση των τεταγμένων είναι: $s_y = |-2|\cdot s_x = 2\cdot 3 = 6$